数理解析研究所講究録
285巻 1976年 103-111

完全m組グラフのclaw分解について

新居浜高専　潮　和彦
広島経済大　田沢新成
広島大・理　山本純恭

1. はじめに

mn個の点と$\binom{m}{2}n^2$本の線からなる完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$ $(m \geq 2)$を考える。$c+1$個の点とc本の線からなる完全2組グラフ$K_2(1,c)$をc-claw（またはc-star）とよぶ。

ここでは，$K_m(n,n,\cdots,n)$を，互いに線を共有しない（line-disjointな）c-clawの和に分解すること（c-claw分解）を考える。

2. c-claw分解

$K_m(n,n,\cdots,n)$のmn個の点をv_{ik} $(i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)$とし，2点間の隣接関係に適当な方向を与え，その隣接関係を与える$mn \times mn$の隣接行列を

$$M=\|m_{ik,jl}\| \qquad i,j=1,2,\cdots,m;\ k,l=1,2,\cdots,n$$

$$m_{ik,jl}=\begin{cases}1 & v_{jl}\text{ が }v_{ik}\text{ に隣接しているとき}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とする。ただし，$ik=(i-1)n+k$ とする。このとき，M は m^2 個の $n\times n$ の部分行列 $M_{ij}=\|m_{ik,jl}\|$ $k,l=1,2,\cdots,n$ をもち，

$$m_{ik,il}=0 \quad \text{したがって} \quad M_{ii}=0$$

$$m_{ik,jl}+m_{jl,ik}=1 \quad (i\neq j)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}m_{ik,jl}=\binom{m}{2}n^2$$

をみたしている。

M の ik 行上にある c 個の 1 の集合は，v_{ik} を根とする c-claw に対応している。従って，次の補題を得る。

<u>補題1</u>　$K_m(n,n,\cdots,n)$ が c-claw 分解可能であることは，隣接関係を適当に方向づけて，$K_m(n,n,\cdots,n)$ の隣接行列 M のどの行和も c の倍数となるようにできることと同値である。

与えられた行和をもつ隣接行列 M の存在に関して，次の補題を得る。

<u>補題2</u>　$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}=\binom{m}{2}n^2$ をみたす非負の整数 α_{ik} $(i=1,2,\cdots,m;$ $k=1,2,\cdots,n)$ を行和にもつ $K_m(n,n,\cdots,n)$ の方向をもった隣接行列 $M=\|m_{ik,jl}\|$ が存在するための必要十分条件は，$\alpha_{i1}\geqq\alpha_{i2}\geqq\cdots\geqq\alpha_{in}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ とするとき，すべての $p=1,2,\cdots,mn$ について，p

の $0 \leqq p_i \leqq n$ をみたす任意の分割 $p=p_1+p_2+\cdots+p_m$ に対して，不等式

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik} \leqq (m-1)np-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_m^2) \tag{1}$$

が成り立つことである。

<u>証明</u>　mn 個の点の集合 $N=\{v_{ik} \mid i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n\}$ と，$\binom{m}{2}n^2$ 本の方向をもった線の集合 $A=\{(ik,jl) \mid 1 \leqq i<j \leqq m;\ 1 \leqq k,l \leqq n\}$ で定義されるネットワーク $[N;A]$ を考える。ここに，(ik,jl) は v_{ik} から v_{jl} への向きをもった線とする。

A 上で定義される整数値関数 $f(ik,jl)$ が存在して，

$$\sum_{j>i}\sum_{l=1}^{n}f(ik,jl)+\sum_{j<i}\sum_{l=1}^{n}\{1-f(jl,ik)\}=\alpha_{ik} \qquad {}^{\forall}v_{ik}\in N \tag{2}$$

$$0 \leqq f(ik,jl) \leqq 1 \qquad (ik,jl)\in A$$

をみたすことは，$j>i$ に対しては，$m_{ik,jl}=f(ik,jl)$，$j<i$ に対しては，$m_{ik,jl}=1-f(jl,ik)$ とおき，さらに，$m_{ik,il}=0$ とおくことにより，α_{ik} を行和にもつ $mn\times mn$ の隣接行列 $M=\|m_{ik,jl}\|$ が存在することと同値である。

(2) から

$$\sum_{j>i}\sum_{l=1}^{n}f(ik,jl)-\sum_{j<i}\sum_{l=1}^{n}f(jl,ik)=\alpha_{ik}-n\cdot(i-1) \tag{3}$$

を得る。

$$S=\{v_{ik} \mid \alpha_{ik}-n(i-1) \geqq 0\}$$

$$T=\bar{S}=N-S=\{v_{ik} \mid \alpha_{ik}-n(i-1)<0\}$$

とし,

$$s(ik) = \alpha_{ik} - n(i-1) \qquad v_{ik} \in S$$

$$d(ik) = -\alpha_{ik} + n(i-1) \qquad v_{ik} \in T$$

$$c(ik, jl) = 1 \qquad (ik, jl) \in \mathcal{A}$$

とすると, *Feasibility theorem* [1],[2] および, *Integrity theorem* [1] により,

$$\sum_{j>i}\sum_{l=1}^{n} f(ik, jl) - \sum_{j<i}\sum_{l=1}^{n} f(jl, ik) \leqq s(ik) \qquad v_{ik} \in S \tag{4}$$

$$\sum_{j<i}\sum_{l=1}^{n} f(jl, ik) - \sum_{j>i}\sum_{l=1}^{n} f(ik, jl) \geqq d(ik) \qquad v_{ik} \in T \tag{5}$$

$$0 \leqq f(ik, jl) \leqq 1 \qquad (ik, jl) \in \mathcal{A}$$

をみたす整数値関数 $f(ik, jl)$ が存在するための必要十分条件は, 任意の $X \subset N$ に対して,

$$\sum_{v_{ik} \in T \cap \bar{X}} d(ik) - \sum_{v_{ik} \in S \cap \bar{X}} s(ik) \leqq |(X, \bar{X})| \tag{6}$$

が成り立つことである。なお, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} = \binom{m}{2} n^2$ であるから, $\sum_{v_{ik} \in S} s(ik) = \sum_{v_{ik} \in T} d(ik)$ が成り立つから, (6)で $\bar{X} = N$ のときには, 等号が成立し, また, (4)(5)では等号が成立する。(6)は

$$-n|\bar{X}| + n\sum_{v_{ik} \in \bar{X}} i - |(X, \bar{X})| \leqq \sum_{v_{ik} \in \bar{X}} \alpha_{ik} \tag{7}$$

と同値である。$|\bar{X}| = p'$, $|\{k \mid v_{ik} \in \bar{X}\}| = p_i'$ $i = 1, 2, \cdots, m$ とすると, $p' = p_1' + p_2' + \cdots + p_m'$ である。

$$-n|\overline{X}| + n\sum_{v_{ik}\in\overline{X}} i - |(X,\overline{X})|$$

$$= -np' + n(p_1' + 2p_2' + \cdots + mp_m') - \{(n-p_1')(p_2'+p_3'+\cdots+p_m') + (n-p_2')(p_3'+p_4'+\cdots+p_m') + \cdots + (n-p_{m-1}')p_m'\}$$

$$= \frac{1}{2}p'^2 - \frac{1}{2}(p_1'^2 + p_2'^2 + \cdots + p_m'^2)$$

であるから，(7)は

$$\frac{1}{2}p'^2 - \frac{1}{2}(p_1'^2 + p_2'^2 + \cdots + p_m'^2) \leqq \sum_{v_{ik}\in\overline{X}} \alpha_{ik} \tag{8}$$

となる。

$|\{k \mid v_{ik}\in X\}| = p_i \quad i=1,2,\cdots,m$ とすると，$p_i = n - p_i' \ (i=1,2,\cdots,m)$，$p_1+p_2+\cdots+p_m = p = mn - p'$ であり，$\alpha_{i1} \geqq \alpha_{i2} \geqq \cdots \geqq \alpha_{in} \ (i=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik} = \binom{m}{2}n^2$ であるから，(8)は

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik} \leqq (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_m^2) \tag{9}$$

と同値になる。

$K_m(n,n,\cdots,n)$ の c-claw 分解に対して，次の定理を得る。

<u>定理3</u>　$K_m(n,n,\cdots,n)$ が c-claw 分解可能であるための必要十分条件は，

(i)　$c \mid \binom{m}{2}n^2$　，かつ

(ii)　$mn \geqq 2c$

である。

<u>証明</u>　（必要性）条件(i)は明らかに必要である。次に，

$mn<2c$ のとき，$K_m(n,n,\cdots,n)$ が $b=\binom{m}{2}n^2/c$ 個の c-claw に分解されたとする。このとき，$b<(m-1)n$ となるから，どの claw の根でもない点が存在し，その次数は $(m-1)n$ より小さい。一方，すべての点の次数は，どれも $(m-1)n$ であるから矛盾である。従って，(ii) は必要である。

（十分性）$c\mid\binom{m}{2}n^2$ より，$\binom{m}{2}n^2/c=mna+nb+g$ とおく。ここに，$a=\left[\frac{(m-1)n}{2c}\right]$，$0\leqq b<m$，$0\leqq g<n$ である。$mn\geqq 2c$ であるから，① $2c\leqq mn<2c+n$，② $2c+n\leqq mn$ の２通りの場合に分けて，c-claw 分解が可能であることを示す。

<u>I. $2c\leqq mn<2c+n$ の場合</u>　この場合，$a=0,\ b=m-1$ であり，かつ，一般に，$(m-1)n\geqq\frac{mn}{2}$ であるから，$(m-1)n\geqq c$ である。

$$\alpha_{ik}=\begin{cases} c & 1\leqq ik\leqq(m-1)n+g \\ 0 & (m-1)n+g+1\leqq ik\leqq mn \end{cases}$$

とおけば，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}=\binom{m}{2}n^2$ をみたす。補題２を用いて，この $\{\alpha_{ik}\}$ が feasible であることを示す。

すべての $p=1,2,\cdots,mn$ について，p の $0\leqq p_i\leqq n$ をみたす任意の分割 $p=p_1+p_2+\cdots+p_m$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik}=(p_0+g')c$$

となる。ここに，$p_0=p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}$，$g'=\min(p_m,g)$ である。

一方，$p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{m-1}^2\geqq\frac{p_0^2}{m-1}$ を用いれば

$$(m-1)np-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_m^2)\geqq(m-1)n(p_0+p_m)-\frac{1}{2}p_0^2-p_0p_m+\frac{p_0^2}{2(m-1)}$$

となる。さらに，$\binom{m}{2}n^2/c=(m-1)n+g$ を用いれば，

$$(m-1)np-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_m^2)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik}$$
$$\geqq\{(m-1)n-p_0\}\cdot\left\{\frac{m-2}{2(m-1)}p_0+p_m-\frac{mn}{2}+c\right\}+(g-g')c$$

となる。

$$f(p_0)=\{(m-1)n-p_0\}\cdot\left\{\frac{m-2}{2(m-1)}p_0+p_m-\frac{mn}{2}+c\right\}+(g-g')c$$

は，$m=2$ のときは，p_0 に関する一次式で，$m\geqq3$ のときは，上に凸な2次式である。$0\leqq p_0\leqq(m-1)n$ であるから，$f(0)\geqq0$，$f((m-1)n)\geqq0$ が成り立てば，$f(p_0)\geqq0$ である。実際，$(m-1)n\geqq c$，$p_m\geqq g'$，$g\geqq g'$ を用いれば，

$$f(0)=(m-1)n\left(p_m-\frac{mn}{2}+c\right)+(g-g')c=(m-1)np_m-cg'\geqq0$$
$$f((m-1)n)=(g-g')c\geqq0$$

である．従って，補題2から，この $\{\alpha_{ik}\}$ は feasible である。補題1,2から，$K_m(n,n,\cdots,n)$ は c-claw 分解可能である。

<u>II．$2c+n\leqq mn$ の場合</u>　この場合，$a\geqq1$ である。$nb+g=r$ とおけば，$ac=\frac{(m-1)n}{2}-\frac{rc}{mn}$ である。

$$\alpha_{ik}=\begin{cases}(a+1)c & 1\leqq ik\leqq r\\ ac & r+1\leqq ik\leqq mn\end{cases}$$

とおけば，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}=\binom{m}{2}n^2$ をみたす。この $\{\alpha_{ik}\}$ が feasible であることを示す．

すべての $p=1,2,\cdots,mn$ について，p の $0\leqq p_i\leqq n$ をみたす任意の分割 $p=p_1+p_2+\cdots+p_m$ に対して，

(i) $p \leqq r$ のとき

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik} \leqq p\cdot(a+1)c = pac + pc = \left\{\frac{(m-1)n}{2} - \frac{rc}{mn}\right\}p + pc$$
$$= \frac{(m-1)np}{2} + \frac{pc}{mn}(mn-r) \leqq \frac{(m-1)np}{2} + \frac{pc}{mn}(mn-p)$$

(ii) $p \geqq r$ のとき

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik} \leqq r\cdot(a+1)c + (p-r)\cdot ac = pac + rc = \left\{\frac{(m-1)n}{2} - \frac{rc}{mn}\right\}p + rc$$
$$= \frac{(m-1)np}{2} + \frac{rc}{mn}(mn-p) \leqq \frac{(m-1)np}{2} + \frac{pc}{mn}(mn-p)$$

となる。一方，$p_1^2+p_2^2+\cdots+p_m^2 \geqq \frac{p^2}{m}$ を用いれば，

$$(m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_m^2) \geqq (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{p^2}{2m}$$

となる。そこで，

$$(m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_m^2) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_i}\alpha_{ik}$$
$$\geqq (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{(m-1)np}{2} - \frac{pc}{mn}(mn-p)$$
$$= \frac{(mn-p)p}{2mn}\{(m-1)n - 2c\} \geqq 0$$

となる。従って，補題2から，この$\{\alpha_{ik}\}$は feasible である。補題1,2から，$K_m(n,n,\cdots,n)$ は c-claw 分解可能である。

I, II の結果から，$K_m(n,n,\cdots,n)$ の c-claw 分解は完了する。

参考文献

[1] Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962), Flows in networks, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[2] Gale, D. (1957), A theorem on flows in networks, Pacific J. Math. 7, 1073-1082.

[3] Ryser, H. J. (1957), Combinatorial property of matrices of zeros and ones, Canad. J. Math. 9, 371−377.

[4] 潮 和彦, 山本純恭(1975), K(n,n,…,n)の claw 分解について—I, II, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会講演予稿集, 34−40, 41−47.

[5] 潮 和彦, 山本純恭(1976), 完全m組グラフの claw 分解, 日本数学会年会応用数学分科会講演予稿集, 38−45.

[6] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975), Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy, Information and Control 28, 156−175.

[7] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975), On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, Hiroshima Math. J. 5, 33−42.